Acta Sci. Math., 41 (1979), 29—31

Compléments à l'étude des opérateurs de classe C_0. IV

H. BERCOVICI, C. FOIAŞ, L. KÉRCHY, B. SZ.-NAGY

Dans la Note précédente [1] un rôle fondamental est joué par les deux propositions suivantes.

Proposition 1. *Pour tout opérateur T de classe C_0 dans l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, les vecteurs $f \in \mathfrak{H}$ pour lesquels $m_{T_f} = m_T$, sont denses dans $\mathfrak{H}$.*

Proposition 2. *Pour tout $f \in \mathfrak{H}$ tel que $m_{T_f} = m_T$, il existe un sous-espace $\mathfrak{M}$ de $\mathfrak{H}$, invariant pour T, et une quasi-affinité $X: \mathfrak{H}(m) \to \mathfrak{H}_f$ $(m = m_T)$ tels que*

$$XS(m) = TX, \quad \mathfrak{H}_f \vee \mathfrak{M} = \mathfrak{H}, \quad X\mathfrak{H}(m) \cap \mathfrak{M} = \{0\}.$$

Rappelons que T_f désigne la restriction de T au sous-espace invariant $\mathfrak{H}_f = \bigvee_{n=0}^{\infty} T^n f$; $S(m)$ est l'opérateur défini sur l'espace fonctionnel $\mathfrak{H}(m) = H^2 \ominus mH^2$ par $S(m)u = P_{\mathfrak{H}(m)}(\lambda \cdot u)$ où $u = u(\lambda) \in \mathfrak{H}(m)$ $(|\lambda| < 1)$, et, pour tout opérateur V de classe C_0, $m_V = m_V(\lambda)$ est la fonction minimum de V.

Or, la démonstration qu'on a indiquée dans [1] pour la proposition 2 était trop sommaire, et même insuffisante.[1]) Nous allons remédier ce point et cela même en établissant le résultat plus fort suivant.

Proposition 2*. *Pour tout $f \in \mathfrak{H}$ tel que $m_{T_f} = m_T$, il existe un sous-espace $\mathfrak{M}$ de $\mathfrak{H}$, invariant pour T, tel que*

$$\mathfrak{H}_f \vee \mathfrak{M} = \mathfrak{H}, \quad \mathfrak{H}_f \cap \mathfrak{M} = \{0\}.$$

(Pour en déduire la proposition 2 il n'y a qu'à rappeler que, d'après la proposition 1 de [2], T_f est quasi-similaire à $S(m)$, avec $m = m_{T_f}$ $(= m_T)$.)

Reçu le 9 novembre 1978.

[1]) Cela a été remarqué par l'un des auteurs (L. K.) de la présente Note; il a d'abord proposé une démonstration portant sinon pour tous les f tels que $m_{T_f} = m_T$, mais du moins pour les éléments f d'un ensemble dense dans $\mathfrak{H}$ (ce qui suffit pour en conclûre aux théorèmes de [1]). Ensuite, on est parvenu à la démonstration suivante.

On commence par le suivant

Lemme. *Soient T et T' des opérateurs de classe C_0 dans les espaces $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{H}'$, et supposons que T et T' sont quasi-similaires et sans multiplicité* (c'est-à-dire $\mu_T = \mu_{T'} = 1$). *Alors, tout opérateur injectif $A: \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}'$ tel que $AT = T'A$, est aussi quasi-surjectif* (c'est-à-dire que $\overline{A\mathfrak{H}} = \mathfrak{H}'$).

Remarque. Le lemme résulte aussi du théorème de [3]. Mais dans le cas particulier ($\mu_T = \mu_{T'} = 1$) qui nous occupe on a la démonstration suivante simple:

L'injection $A: \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}'$ induit une quasi-affinité $B: \mathfrak{H} \to \mathfrak{L}$ où $\mathfrak{L} = \overline{A\mathfrak{H}}$ et on a évidemment $BT = (T'|\mathfrak{L})B$. Il s'ensuit que $T'|\mathfrak{L}$ et T, donc aussi $T'|\mathfrak{L}$ et T', ont la même fonction minimum. Puisque T' est sans multiplicité, on a alors par le théorème 2(iv) de [2] que $\mathfrak{L} = \mathfrak{H}'$, donc $\overline{A\mathfrak{H}} = \mathfrak{H}'$.

Le lemme établi, passons à la démonstration de la proposition 2*.

Puisque T_f a le vector cyclique f, son adjoint $(T_f)^*$ a aussi un vecteur cyclique, soit g; *cf.* le théorème 2 de [2]. Posons

$$\mathfrak{H}_{*g} = \bigvee_{n=0}^{\infty} T^{*n} g, \quad T_{*g} = (T^*|\mathfrak{H}_{*g})^*, \quad P = P_{\mathfrak{H}_{*g}}, \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_{*g};$$

$\mathfrak{H}_{*g}$ étant invariant pour T, $\mathfrak{M}$ est invariant pour T.

De la définition il dérive aussitôt que $T_{*g}P = PTP$, donc $T_{*g}Px = PTx$ pour $x \in \mathfrak{H}_{*g}$. Or, la dernière équation est vérifiée pour $x \in \mathfrak{M}$ aussi, car on a $Py = 0$ pour tout $y \in \mathfrak{M}$. On a donc $T_{*g}P = PT$ et par conséquent

$$T_{*g}^n X = X T_f^n \quad (n = 0, 1, \ldots) \quad \text{où} \quad X = P|\mathfrak{H}_f = P_{\mathfrak{H}_{*g}}|\mathfrak{H}_f, \tag{1}$$

et en passant aux adjoints,

$$X^* T_{*g}^{*n} = T_f^{*n} X^* \quad (n = 0, 1, \ldots), \quad X^* = P_{\mathfrak{H}_f}|\mathfrak{H}_{*g}. \tag{2}$$

Puisque g est contenu dans $\mathfrak{H}_f \cap \mathfrak{H}_{*g}$, on a $X^* g = g$, et par (2)

$$X^* T_{*g}^{*n} g = T_f^{*n} g \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{3}$$

Or, g étant cyclique pour T_f^*, (3) entraîne que $X^* \mathfrak{H}_{*g}$ est dense dans $\mathfrak{H}_f$. Il s'ensuit que X est *injectif*.

On en déduit que $\mathfrak{H}_f \cap \mathfrak{M} = \{0\}$. En effet, pour $x \in \mathfrak{H}_f \cap \mathfrak{M}$ on a $Xx = Px$ (parce que $x \in \mathfrak{H}_f$) $= 0$ (parce que $x \in \mathfrak{M}$), d'où $x = 0$ (parce que X est injectif).

Notons que de (1) il dérive $u(T_{*g})X = Xu(T_f)$ pour toute fonction $u \in H^\infty$, d'où, toujours par l'injectivité de X, il s'ensuit que $m_{T_f} | m_{T_{*g}}$. D'autre part, on a

$$m_{T_{*g}} = m_{(T^*|\mathfrak{H}_{*g})^*} = \tilde{m}_{T^*|\mathfrak{H}_{*g}} | \tilde{m}_{T^*} = m_T.$$

Puisque par hypothèse $m_{T_f}=m_T$, on conclut que $m_{T_f}=m_{T_{*g}}$. Les opérateurs T_f et T_{*g}, étant cycliques et ayant la même fonction minimum, sont quasi-similaires. Vu que X est injectif, et que $T_{*g}X=XT_f$, on a en vertu du lemme que X est aussi *quasi-surjectif*, donc $\overline{P\mathfrak{H}_f}=\mathfrak{H}_{*g}$.

Puisque $\overline{P\mathfrak{H}_f}$ est évidemment compris dans $\mathfrak{H}_f\vee\mathfrak{M}$ cela entraîne que

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_{*g}\oplus\mathfrak{M}=P\mathfrak{H}_f\vee\mathfrak{M}=\mathfrak{H}_f\vee\mathfrak{M}.$$

Cela achève la démonstration.

Ouvrages cités

[1] H. Bercovici, C. Foiaş, B. Sz.-Nagy, Compléments à l'étude des opérateurs de classe C_0. III, *Acta Sci. Math.*, **37** (1975), 313—322.

[2] B. Sz.-Nagy—C. Foiaş, Compléments à l'étude des opérateurs de classe C_0. (I), *Acta Sci. Math.*, **31** (1970), 287—296.

[3] B. Sz.-Nagy—C. Foiaş, On injections, intertwining operators of class C_0, *Acta Sci. Math.*, **40** (1978), 163—167.

(H. B.)
BD. BĂLCESCU 32—34
70 124 BUCUREŞTI
ROMANIA

(L. K. ET B. SZ.-N.)
BOLYAI INTÉZET
ARADI VÉRTANUK TERE 1.
SZEGED, HONGRIE 6720